A matematika alapjai, 1. óra

1. Igaz vagy hamis?
a) $\emptyset \in \emptyset$ **b)** $\emptyset = \{\emptyset\}$ **c)** $\emptyset \in \{\emptyset\}$ **d)** $\{\emptyset\} \in \emptyset$ **e)** $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ **f)** $\{\emptyset\} \subseteq \emptyset$
g) $\emptyset \subseteq \emptyset$ **h)** $\{\emptyset\} = \{\{\emptyset\}\}$ **i)** $\emptyset \in \{\{\emptyset\}\}$ **j)** $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$ **k)** $\emptyset \subseteq \{\{\emptyset\}\}$ **l)** $\{\emptyset\} \subseteq \{\{\emptyset\}\}$
m) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq \{\{\emptyset\}\}$ **n)** $\emptyset \in \mathbb{N}$ **o)** $\emptyset \subseteq \mathbb{N}$ **p)** $\{\emptyset\} \in \mathbb{N}$ **q)** $\{\emptyset\} \subseteq \mathbb{N}$

2. a) A Végtelen Szállodában végtelen sok szoba van, minden természetes szám pontosan egy szoba száma. Egy új vendég szobát szeretne foglalni, azonban a szálloda tele van. Mit tehet a tulajdonos, ha szeretne a szállodájában szobát adni az új vendégnek, de persze a régieket sem akarja elküldeni?
b) Egy végtelen busz érkezik, tele új vendéggel (sorszámozottak). Tud-e mindegyiknek szobát adni a tulaj?
c) Újabb végtelen busz érkezett, de ezúttal nem is egy, hanem végtelen sok darab, melyek a természetes számokkal vannak sorszámozva, és mind tele van szobára áhítozó vendéggel...

3. Uhanga törzsfőnök az esti szavazás eredményét összegzi. Aki a szomszéd törzs megtámadását szorgalmazta, piros bogyót dobott az edénybe, aki nem, az zöldet. Uhanga ugyan nem tud számolni, mégis meg tudta állapítani, melyik tábor nyert. Hogyan?

4. Miből van több: **a)** páros vagy páratlan számból? **b)** természetes számból vagy négyzetszámból?

Definíció: Legyen A és B két halmaz, f pedig egy $A \to B$ függvény (azaz A minden eleméhez hozzárendeli B-nek pontosan egy elemét). Azt mondjuk, hogy f *injektív*, ha $\forall x, y \in A, x \neq y$ esetén $f(x) \neq f(y)$; *szürjektív*, ha $\forall b \in B \exists a \in A\colon f(a) = b$; és *bijektív*, ha szürjektív és injektív egyszerre.

5. Mutass...
a) $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ injekciót. **b)** $\mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ injekciót. **c)** $\mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ szürjekciót. **d)** $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ szürjekciót.
e) $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ bijekciót.

6. Mutass bijekciót
a) $\mathbb{R}$ és a $(-1;1)$ között;
b) az $\mathbb{N}$ halmaz összes részhalmazából álló halmaz (jele: $\mathcal{P}(\mathbb{N})$) és a végtelen hosszú 0–1 sorozatok között;
c) a $[0;1]$ és a $[0;1)$ intervallumok között.

7. a) Mutass injekciót $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ és $\mathbb{R}$ közt.
b) Mutass injekciót $\mathbb{R}$ és $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ közt.

8. Igazoljuk az alábbi állításokat az $f\colon A \to B$ és $g\colon B \to C$ leképezésekre:
a) Ha f és g injekció, akkor $g \circ f$ is az.
b) Ha $g \circ f$ injekció, akkor f is az, de g nem feltétlenül az. De ha ráadásul f szürjektív, akkor g is injekció.
c) Ha f és g szürjektívek, akkor $g \circ f$ is az.
d) Ha $g \circ f$ szürjektív, akkor g is az, de f nem feltétlenül. De ha ráadásul g injektív, akkor f is szürjektív.

Jelölés: Legyen f tetszőleges függvény, $X \subseteq D_f$, Y tetszőleges halmaz. Ekkor $f[X] = \{f(x)\colon x \in X\}$ (ez az X-beli elemek képeinek halmaza), és $f^{-1}[Y] = \{x \in D_f\colon f(x) \in Y\}$ (ez az Y-ba képződő elemek halmaza). Vegyük észre: f^{-1} általában nem $R_f \to D_f$ függvény (miért?), de *halmazfüggvényként* nyugodtan értelmezhetjük.

9. Legyen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. Micsoda $f[(-1;1)]$, $f^{-1}[\{4,5,6\}]$, $f^{-1}[(-1,1)]$, $f^{-1}[(-3;-2)]$?

10. Adjunk szükséges és elégséges feltételt arra, hogy egy $f\colon A \to B$ függvény esetén mikor teljesül minden $X, Y \subseteq A$-ra, hogy $f[X \cap Y] = f[X] \cap f[Y]$.

11. Legyen $f\colon A \to B$. **a)** Mikor igaz $f^{-1}[f[X]] = X$ minden $X \subseteq A$-ra? **b)** Mikor igaz $f[f^{-1}[Y]] = Y$ minden $Y \subseteq B$-re?

12. **a)** Fejezzük ki a $\cap$ operációt a $\setminus$ operációval. (Azaz: adjunk olyan formulát, mely csak az A, B jeleket, zárójeleket és a $\setminus$ jelet tartalmazza, és tetszőleges A, B halmaz esetén elvégezve a formula által előírt műveleteket az $A \cap B$ halmazt kapjuk eredményül.)
Definiáljuk a szimmetrikus differenciát a következőképpen: $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Fejezzük ki az $\cup$, $\cap$ és $\setminus$ operációkat a
b) $\triangle$ és $\cap$;
c) $\triangle$ és $\cup$;
d) $\triangle$ és $\setminus$ segítségével.
e) Igazoljuk, hogy az $\cup$ operáció nem fejezhető ki csak a $\cap$ és a $\setminus$ felhasználásával.
f) Igazoljuk, hogy a $\setminus$ operáció nem fejezhető ki csak a $\cap$ és az $\cup$ operációkkal.

13. Mutassuk meg, hogy a $\triangle$ szimmetrikus differencia kommutatív és asszociatív művelet, továbbá a $\cap$ rá vonatkozóan disztributív (azaz $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$), létezik rá nézve neutrális elem, és az $A \triangle X = B$ egyenlet X-re mindig megoldható. Mi köze mindennek a kettes számhoz?

14. **a)** Mutass n db. $n-1$ elemű halmazt, melyek közül bármely $n-1$-nek van közös eleme, de az összesnek nincs ($n \geq 2$).
b*) Mutasd meg, hogy tetszőleges, az előző részfeladat követelményeit kielégítő n darab halmaz uniója n elemű.
c) Mutass három halmazt, melyek közül bármely kettőnek végtelen sok közös eleme van, de a háromnak a metszete üres.

15. Legyenek a feladatban szereplő halmazaink egy X alaphalmaz részhalmazai. Az A halmaz X-re vonatkozó komplementerét $\overline{A} = X \setminus A$ definiálja. Mutassuk meg, hogy
a) $\overline{\overline{A}} = A$;
b) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
c) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
d) $\overline{A \setminus B} = \overline{A} \cup B$.
e) Mutassuk meg, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ halmazokból a komplementálás, a $\cap$ és az $\cup$ műveletekkel legfeljebb 2^{2^n} különböző halmaz állítható elő.
f) Adjunk szükséges és elegendő feltételt arra, hogy ennyi halmaz előállítható legyen.

16. Legyen $A \star B = \overline{A \cup B}$. Mutassuk meg, hogy $\cup$, $\cap$, $\setminus$ kifejezhető a $\star$ operációval. (Egy X alaphalmaz fölött dolgozunk.)