

Definíció: Az \mathbb{R} számosságát *kontinuumnak* nevezzük, amit c -vel jelölünk. Az \mathbb{N} számosságát *megszámlálható végtelenségnek* nevezzük és \aleph_0 -al jelöljük (ejtsd: alef null).

Definíció: Ha A halmaz, $\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}$ az A *hatványhalmaza* (azaz $\mathcal{P}(A)$ az A részhalmazainak a halmaza).

1. Legyen A egy véges, n elemű halmaz. Hány eleme van $\mathcal{P}(A)$ -nak?
2. Egy H halmazra legyen $\mathcal{P}^1(H) = \mathcal{P}(H)$, és legyen $\mathcal{P}^k(H) = \mathcal{P}(\mathcal{P}^{k-1}(H))$.
 - a) Micsoda $\mathcal{P}(\emptyset)$? És $\mathcal{P}(\{\emptyset\})$? És $\mathcal{P}^3(\emptyset)$?
 - b) Hány eleme van $\mathcal{P}^n(\emptyset)$ -nek?
3. Mutassuk meg, hogy tetszőleges valós $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ számsorozathoz található olyan valós x szám, melyre $\forall i \in \mathbb{N} : x \neq a_i$. Mit jelent ez \mathbb{R} számosságára nézve?
- 4*. **Cantor-tétel.** Mutassuk meg, hogy tetszőleges (esetleg végtelen) X halmazra $|X| < |\mathcal{P}(X)|$.
5. Hányféleképpen tudod bizonyítani eddig, hogy a valós számok halmaza nem megszámlálható (avagy $c > \aleph_0$)?
6. Van-e a c -nél nagyobb számosság? Tudsz konkrétan olyan halmazt mutatni, aminek nagyobb a számossága, mint \mathbb{R} -nek? És annál is nagyobbat? Vajon van olyan, hogy legnagyobb számosság?

„Definíció:” Az \aleph_0 -nál nagyobb számosságok közül a legkisebbet \aleph_1 -nek nevezzük. Hasonlóan, az \aleph_n számosság az a legkisebb számosság, ami nagyobb \aleph_{n-1} -nél¹.

7. Mit tudunk \aleph_1 és c viszonyáról ($=, \leq, \geq, <, >, \dots$)?
8. Mutasd meg, hogy csak megszámlálható sok diszjunkt körlapot lehet elhelyezni a síkon.
9. Mutassuk meg, hogy nem lehet lefedni a síkot c -nél kevesebb egyenessel.
10. Hány véges részhalmaza van \mathbb{N} -nek?

¹Egyáltalán nem nyilvánvaló, hogy ez a definíció értelmes. Például annak sincs értelme, hogy a „2-nél nagyobb valós számok közül a legkisebb”. Belátható azonban, hogy a végtelen számosságokra a fenti definíció értelmes (de ettől eltekintünk ebben a kurzusban).