A matematika alapjai, 4. óra

Definíció (műveletek számosságokkal):

- Összeadás: ha a és b számosságok, $a+b$ legyen $|A \cup B|$, ahol $|A| = a$, $|B| = b$ és $A \cap B = \emptyset$.
- Szorzás: ha a és b számosságok, ab legyen $|A \times B|$, ahol $|A| = a$, $|B| = b$.
- Általános számosságösszeadás (akár végtelen soké): ha $\{a_i : i \in I\}$ számosságok halmaza, akkor $\sum_{i \in I} a_i$ legyen $|\cup_{i \in I} A_i|$, ahol $|A_i| = a_i$, és az $A_i : i \in I$ halmazok páronként diszjunktak.
- Általános Descartes-szorzatát. Tetszőleges $\{A_i : i \in I\}$ halmazrendszer esetén

$$\prod_{i \in I} A_i := \{f : f(i) \in A_i \text{ minden } i \in I\text{-re}\}.$$

  $\prod_{i \in I} A_i$ elemeit az $\{A_i : i \in I\}$ rendszerhez tartozó *kiválasztási függvényeknek* nevezzük[1].
- Általános számosszágszorzás (akár végtelen soké): ha $\{a_i : i \in I\}$ számosságok halmaza, akkor $\prod_{i \in I} a_i$ legyen $\left|\prod_{i \in I} A_i\right|$, ahol $|A_i| = a_i$.

1. Lássuk be, hogy
a) két számosság összege és szorzata jóldefiniált;
b) akármilyen $\{a_i : i \in I\}$ számossághalmazra $\sum_{i \in I} a_i$ és $\prod_{i \in I} a_i$ jóldefiniált;
c) két számosság esetén a kétféle szorzatdefiníció ugyanazt az eredményt adja.

2. Lássuk be, hogy tetszőleges a, b, c számosságok esetén
a) $a + b = b + a$; **b)** $(a + b) + c = a + (b + c)$;
c) $ab = ba$; **d)** $(ab)c = a(bc)$; **e)** $(a + b)c = ac + bc$.

3. Tegyük fel, hogy $\{a_i : i \in I\}$ és $\{b_j : j \in J\}$ számosságok halmazai. Mutassuk meg, hogy

$$\left(\sum_{i \in I} a_i\right)\left(\sum_{j \in J} b_j\right) = \sum_{i \in I}\sum_{j \in J} a_i b_j.$$

Definíció (számosságok hatványozása). Ehhez előbb definíció: ${}^{B}A := \{f : B \to A\}$. Az a és b számosságokra legyen $a^b = \left|{}^{B}A\right|$.

Függvény definíciója: egy f függvény olyan halmaz, melynek minden eleme rendezett pár, és teljesül rá, hogy tetszőleges x, y, z elemekre $(x, y) \in f$ és $(x, z) \in f$ teljesülése esetén $z = y$ is teljesül. (Ha f-et a szokásos módon gondoljuk egy $A \to B$ leképezésnek, akkor a fenti halmaz az $\{(a, f(a)) : a \in A\}$ alakú párok halmazát fogja meg, amiből kiolvasható a hozzárendelés: minden párnál annak első eleméhez rendeljük a második elemét.) Vegyük észre, hogy ebben a definícióban nincs explicit módon megadva, hogy f honnan hova képez. Akkor mondjuk, hogy f az A halmazt képezi a B halmazba (azaz f egy $A \to B$ függvény), ha $D_f := \{x : \exists y : (x, y) \in f\} = A$, és $R_f := \{y : \exists x : (x, y) \in f\} \subseteq B$.

4. Van-e olyan f függvény, melyre $D_f = \emptyset$ vagy $R_f = \emptyset$?

5. Mutassuk meg, hogy tetszőleges a számosságra **a)** $a^0 = 1$; **b)** $0^a = 0$ ha $a \neq 0$; **c)** $a^1 = a$; **d)** $1^a = 1$.

6. (A számossághatványozás azonosságai.) Igazoljuk, hogy tetszőleges a, b, c számosságokra
a) $(ab)^c = a^c b^c$; **b)** $(a^b)^c = a^{bc}$; **c)** $a^{b+c} = a^b a^c$.

7. Mutassuk meg, hogy **a)** minden A halmazra $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$; **b)** minden a számosságra $2^a > a$.

8. Bizonyítsuk be, hogy
a) $2^{\aleph_0} = c$;
b) $c^2 = c$;
c) $\big|[0,1] \times [0,1]\big| = \big|[0,1]\big|$, azaz a négyzetnek ugyanannyi pontja van, mint az oldalának (ez is kontraintuitív);
d) $|\mathbb{R}^n| = |\mathbb{R}|$, azaz az n dimenziós $\mathbb{R}^n$ térnek ugyanannyi pontja van, mint az egyenesnek.

[1] Mert minden $i \in I$ indexre választanak egy elemet A_i-ből.