

A matematika alapjai, 5. óra

1. Mutassunk példát olyan a, b, c számosságokra, melyekre $a < b$, és **a)** $a + c = b + c$; **b)** $ac = bc$.
2. (A számosságműveletek gyenge monotonitása.) Legyen $\{a_i : i \in I\}$ és $\{b_i : i \in I\}$ számosságok két halmaza (azonos indexhalmazzal), melyre $a_i \leq b_i$ teljesül minden $i \in I$ -re. Lássuk be, hogy

$$\text{a) } \sum_{i \in I} a_i \leq \sum_{i \in I} b_i; \qquad \text{b) } \prod_{i \in I} a_i \leq \prod_{i \in I} b_i.$$

3. Mutassuk meg, hogy ha $a_0 \leq a_1$ és $b_0 \leq b_1$, akkor $a_0^{b_0} \leq a_1^{b_1}$, kivéve, ha $0 = a_0 = a_1 = b_0 < b_1$ (miért kivétel ez?).

4. Legyen $n \in \mathbb{N}$. Mennyi

- a)** $\aleph_0 + n$? **b)** $2 \cdot \aleph_0$? **c)** $n \cdot \aleph_0$? **d)** $\sum_{i=0}^{\infty} \aleph_0$? **e)** $\aleph_0 + c$? **f)** $2c$? **g)** nc ? **h)** $\aleph_0 \cdot c$?
i) \aleph_0^2 ? **j)** 2^{\aleph_0} ? **k)** \aleph_0^n ? **l)** $\aleph_0^{\aleph_0}$? **m)** c^2 ? **n)** c^n ? **o)** c^{\aleph_0} ? **p)** c^c ?

5. **a)** Hány darab diszjunkt körvonalat (nem feltétlenül ugyanakkora sugarút) lehet lerakni a síkra?
b) És valódi körlapot (a pontokat kizárjuk)?
c) Hány darab valódi háromszög van a síkon?
d) Hány darab diszjunkt L betűt lehet letenni a síkra?
e*) És T betűt?

6. Legyen a_1, a_2, a_3, \dots természetes számok egy sorozata. Mennyi lehet az $a_1 a_2 a_3 \dots$ (végtelen) szorzat értéke?

7. Mutasd meg, hogy

- a) a folytonos $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények száma c ;
- b) az összes $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények száma 2^c .
- c) Vegyük észre, hogy ezzel bizonyítottuk, hogy van nem folytonos valós függvény (amin persze nem lepődünk meg).

8. **a)** Legyen S az összes teáskanál halmaza, T pedig az összes olyan dologé, ami *nem* teáskanál¹. Melyik igaz ezek közül: $S \in T$, $T \in S$, $S \in S$, $T \in T$?

b) Legyen X azon halmazok halmaza, melyek nem elemük önmaguknak. Mit mondhatunk X -ről?

9. **a)** Mutassuk meg, hogy számosságok tetszőleges H halmazához található olyan számosság, ami nincs benne H -ban.

b) Vegyük az összes számosságok halmazát. Most akkor van ilyen vagy nincs?

10. Vegyük az összes halmazok halmazát, meg annak a hatványhalmazát. Jó ez így?

11. Mit is nevezünk halmaznak?

¹Ha valaki ezt komolytalannak érezné, a teáskanál szót szinte tetszőleges más, jobban definiált / komolyabbnak tűnő fogalommal helyettesítheti. Bertrand Russelnek nem volt probléma, hogy ezt a példát használja.