A matematika alapjai, 7. feladatsor

A kiválasztási axióma (Axiom of Choice): ha $\{A_i : i \in I\}$ nemüres halmazok rendszere, akkor létezik $f: I \to \cup_{i \in I} A_i$ kiválasztási függvény, azaz olyan I-n értelmezett függvény, melyre $f(i) \in A_i$ minden $i \in I$-re.

Elnevezés: Az előző órai axiómarendszer ezzel kiegészítve a ZFC axiómarendszer nevet viseli.

1. Legyen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, $x \in \mathbb{R}$ és $y_0 = f(x_0)$. Tegyük föl, hogy minden $x_n \to x_0$ sorozat esetén $f(x_n) \to y_0$. Mutassuk meg, hogy f folytonos x_0-ban (azaz $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - y_0| < \varepsilon$).

2. Mutassuk meg, hogy megszámlálható sok megszámlálható halmaz uniója megszámlálható!

3. Mutassuk meg, hogy minden végtelen halmaznak van megszámlálhatóan végtelen részhalmaza. (Azaz ha a végtelen számosság, akkor $a \geq \aleph_0$.)

4. Mutassuk meg, hogy ha a végtelen számosság, akkor $a + \aleph_0 = a$.

5. A számosságszorzás gyenge monotonitása szerint ha $\{A_i : i \in I\}$ nemüres halmazok, akkor $|\{f : f(i) \in A_i \forall i \in I\}| = \prod_{i \in I} |A_i| \geq \prod_{i \in I} 1 = 1$, tehát nemüres halmazok tetszőleges halmazához van kiválasztási függvény, tehát igaz a kiválasztási axióma. Bizonyítja-e ez a kiválasztási axiómát?

6. Tegyük föl, hogy egy valós f függvényre $f(x + y) = f(x) + f(y)$ teljesül minden valós x, y számra (ez a Cauchy-féle függvényegyenlet). Mutassuk meg, hogy
a) $f(0) = 0$;
b) $f(nx) = nf(x)$ minden pozitív egész n-re;
c) $f(nx) = nf(x)$ minden egész n-re;
d) $f(nx) = nf(x)$ minden racionális n-re;
e) ha f folytonos, akkor $f(x) = cx$ valamilyen c konstansra.

Tétel: minden vektortérnek van bázisa (feltéve a kiválasztási axiómát).

Definíció: Tekintsük az $\mathbb{R}$ halmazt egy $\mathbb{Q}$ feletti vektortérnek (a szokásos műveletekkel). Ennek a vektortérnek egy bázisát *Hamel-bázisnak* nevezzük.

7. Mutassuk meg, hogy a Cauchy-féle függvényegyenletnek van nem cx alakú megoldása.

8. Mutassuk meg, hogy az $f(x) = x$ függvény előáll két periodikus függvény összegeként.

9. Legyen H egy Hamel-bázis. Mit mondhatunk H számosságáról?

Mese: A fenti első három feladat arra mutat rá, hogy sok bizonyításban használjuk a kiválasztási axiómát annak igazolására, hogy egy természetesnek gondolt lépés jogosságát alátámasszuk. Ez érv lehet a kiválasztási axióma axiómaként való rögzítése mellett. Még néhány érv emellett:

- Ha nem tesszük föl a kiválasztási axiómát, akkor előfordulhat, hogy megszámlálható sok megszámlálható halmaz uniója nem megszámlálható (tehát van olyan modell, melyben nem teljesül a kiválasztási axióma, és melyben található megszámlálható sok megszámlálható halmaz, melyek uniója nem megszámlálható).

- Egy modellben pontosan akkor teljesül a számosságrendezés trichotómiája (azaz hogy bármely két halmazra $|A| < |B|$, $|A| = |B|$ és $|A| > |B|$ közül pontosan az egyik áll fenn), ha teljesül benne a kiválasztási axióma (más szóval: a kiválastási axióma és a számosságrenezés trichotómiája ekvivalensek).

Másrészt vannak meglepő (kontraintuitív) következményei is, melyek lehetnének érvek ellene, vagy a gyengítése mellett. Ilyen például a 7. és a 8. feladat, vagy a Banach–Tarski-paradoxon, mely szerint egy három dimenziós tömör gömböt föl lehet bontani úgy öt diszjunkt részre, hogy azokból térbeli mozgatások segítségével össze lehet rakni két ugyanakkora tömör gömböt.

Mese2: A kontinuumhipotézis szerint nincs számosság $|\mathbb{N}|$ és $|\mathbb{R}|$ között (azaz $c = \aleph_1$.) A ZFC axiómarendszernek van olyan modellje is, melyben ez teljesül, de olyan is, melyben nem, azaz a kontinuumhipotézis független a ZFC-től.