A matematika alapjai, 8. feladatsor

Definíciók: Ítéletváltozó: igaz vagy hamis értéket fölvevő változó. **Formula:** ítéletváltozókból és a $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ jelekből, valamint zárójelekből álló, szintaktikailag helyes karaktersorozat. **Kiértékelés:** az ítéletváltozók mindegyikébe az igaz vagy hamis érték helyettesítése. **Igazságtáblázat:** egy adott formula igazságértékét tartalmazza minden lehetséges kiértékelésre. Két formula **logikailag ekvivalens**, ha bármely kiértékelésnél ugyanaz az értékük (jelölése: $\equiv$). Egy formula **tautológia**, ha minden kiértékelésnél igaz. Egy F formula **teljes diszjunktív normálformája** egy olyan G formula, melyre $F \equiv G$ és $G = G_1 \vee G_2 \vee \cdots \vee G_k$ alakú, ahol $\forall i \in \{1, 2, \ldots, k\}$-re G_i-ben *minden* (F-ben szereplő) ***ítéletváltozó előfordul pontosan egyszer*** (esetleg negálva), és a (negált) ítéletváltozók között csak $\wedge$ kapcsolat van. Formulák egy $\mathcal{F}$ halmaza **kielégíthető**, ha van olyan kiértékelés, melynél minden $\mathcal{F}$-beli formula igaz. Az $\mathcal{F}$ formulhalmaznak egy G formula **(logikai) következménye**, ha minden olyan kiértékelésre, melynél $\mathcal{F}$ összes eleme igaz, G is igaz; jele $\mathcal{F} \models G$.

1. a) „A ruhatáron kívül elhelyezett tárgyakért felelősséget nem vállalunk!” Mit jelent ez a ruhatárban őrzött tárgyakra nézve?
b) Az utcán egy nagydarab, sötét alak Móriczka elé ugrik: „Ha adsz egy ezrest, nem verlek meg!” Értékeld logikai szempontból a kijelentést és Móriczka lehetséges reakcióit!
c) Az utcán egy másik nagydarab, sötét alak ugrik Móriczka elé: „Ha nem adsz egy ezrest, akkor megverlek!” Most mik a kilátások?

2. Tekintsük az alábbi kijelentéseket: A: Gombóc Artúr el tud utazni Afrikába; B: Gombóc Artúrt elbírja a repülőgép; C: indul hajó Afrikába. Tekintsük az alábbi mondatot: Gombóc Artúr akkor és csak akkor tud Afrikába utazni, ha elbírja a repülőgép, vagy ha nem bírja el a repülőgép, de indul hajó Afrikába. Az alábbi formulák közül melyik formalizálja a fenti mondatot?

a) $(A \leftrightarrow B) \vee ((\neg B) \wedge C)$ **b)** $(A \leftrightarrow B) \vee ((\neg B) \rightarrow C)$
c) $A \leftrightarrow (B \vee ((\neg B) \wedge C))$ **d)** $A \rightarrow (B \vee ((\neg B) \wedge C)$

3. Legyenek A és B ítéletváltozók. **a)** Idézzük föl A, $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$ és $A \leftrightarrow B$ igazságtáblázatait!
b) Írjunk föl az $A \wedge B$, $A \rightarrow B$ és $A \leftrightarrow B$ formulákkal ekvivalens, csak $\neg$ és $\vee$ jeleket tartalmazó formulákat!
c) Írjunk föl az $A \wedge B$, $A \vee B$ és $A \leftrightarrow B$ formulákkal ekvivalens, csak $\neg$ és $\rightarrow$ jeleket tartalmazó formulákat!

4. Igazoljuk az alábbi logikai ekvivalenciákat!
a) $(A \wedge B) \rightarrow C \equiv A \rightarrow (B \rightarrow C)$ **b)** $((\neg A) \rightarrow (A \wedge B)) \wedge C \equiv (A \leftrightarrow C) \wedge A$
c) $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \equiv (A \wedge B) \rightarrow C$ **d)** $\neg(A \rightarrow (B \wedge C)) \equiv (A \wedge (\neg B)) \vee (A \wedge (\neg C))$

5. Add meg az alábbi formulák teljes diszjunktív normálformáját!
a) $(A \rightarrow B) \vee (B \wedge (\neg A))$ **b)** $(A \leftrightarrow B) \wedge (\neg A)$
c) $(\neg(A \vee C)) \wedge (B \vee (\neg A))$ **d)** $(A \wedge B) \leftrightarrow ((\neg C) \vee A)$

6. Melyik tautológia ezek közül?
a) $A \vee (B \rightarrow (\neg A))$ **b)** $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ **c)** $((A \vee B \vee C) \wedge (\neg B)) \rightarrow (A \rightarrow C)$
d) $A \rightarrow (A \wedge B)$ **e)** $(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$ **f)** $(A \rightarrow B) \rightarrow ((C \rightarrow B) \rightarrow ((A \vee C) \rightarrow B))$

7. Hány logikailag nem ekvivalens formula adható n ítéletváltozó használatával?

8. Helyesek-e az alábbi következtetések?
a) $\{A \vee B \vee C, (\neg A) \wedge (\neg C)\} \models B$ **b)** $\{A \vee B, B\} \models \neg A$
c) $\{A \rightarrow (B \wedge C), (\neg C) \vee B, A \vee C\} \models B \vee C$ **d)** $\{A \rightarrow B, C \rightarrow D, (\neg B) \wedge D\} \models A \wedge C$
e) Ha piros hó esik, és nem fúj a szél, akkor harangoznak. Tehát ha piros hó esik és nem harangoznak, akkor fúj a szél.
f) Ha fúj a szél, akkor süt a nap vagy hideg van. Nem fúj a szél vagy süt a nap. Tehát ha süt a nap, akkor nincs hideg.

9. A lovagok és lőkötők szigetén mindenki vagy lovag, vagy lókötő. A lovagok mindig igazat mondanak, a lókötők mindig hazudnak.
a) Két emberrel találkozunk, A-val és B-vel. A azt mondja: „Legalább az egyikünk lókötő.” Miféle A és B?
b) Három lakossal találkozunk, A-val, B-vel és C-vel. A ezt mondja: „B és C egyforma típusú.” Valaki megkérdi C-től: „Egyforma típusú A és B?” Mit válaszol C?
Oldjuk meg a feladatokat „józan paraszti ésszel”, illetve logikai formalizálás segítségével is!

10. Most a lovagok (mindig igazat igazmondók), lókötők (mindig hazudók) és normálisak (hol igazat, hol valótlant állítók) szigetén járunk. Adott három szigetlakó, A, B és C, akikről tudjuk, hogy egyikük lovag, másikuk lókötő, harmadikuk pedig normális (de azt nem tudjuk, hogy ki milyen). A következőket állítják:
A: Normális vagyok.
B: Ez igaz.
C: Nem vagyok normális.
Miféle A, B és C? Hogyan lehetne a feladatot formálisan (ítéletváltozókkal, formulákkal, igazságtáblázattal stb) megoldani?

11. A lovagok, lókötők és normálisok szigetén két ember, A és B, a következőket állítják:
A: B lovag.
B: A nem lovag.
Mutassuk meg, hogy legalább az egyikük igazat mond, habár nem lovag. Hogyan lehetne a feladatot formálisan megoldani?

Definíciók:
Logikai axiómák (axiómasémák):
1) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
2) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$
3) $((\neg\beta) \to (\neg\alpha)) \to (((\neg\beta) \to \alpha) \to \beta)$.
Modus Ponens (levágás) következtetési szabály: $\alpha, \alpha \to \beta \models \beta$.
Egy $\mathcal{F}$ formulahalmazból az F formula **levezethető**, ha van olyan $F_1, F_2, \ldots, F_n$ formulasorozat, melyben minden $1 \leq i \leq n$-re $F_i \in \mathcal{F}$, vagy F_i logikai axióma (melyben α, β, γ helyébe tetszőleges formulák vannak helyettesítve), vagy F_i valamely F_j, F_k formulák következménye a Modus Ponens szerint, ahol $j < i$ és $k < i$; továbbá $F_n = F$. Jelölés: $\mathcal{F} \vdash F$. Az $\mathcal{F}$-beli formulákat szokás *feltevés*-eknek hívni.

12. Mutassuk meg, hogy a logikai axiómák tautológiák (bármely formulák legyenek is α, β és γ helyébe írva).

Példa. Mutassuk meg, hogy tetszőleges F formulára $\emptyset \vdash F \to F$.
Az 1. logikai axiómába $\alpha = F$-et és $\beta = F \to F$-et helyettesítve legyen
$F_1 = F \to (F \to F) \to F$. A 2. logikai axiómába $\alpha = \gamma = F$-et és $\beta = F \to F$-et helyettesítve legyen
$F_2 = (F \to ((F \to F) \to F)) \to ((F \to (F \to F)) \to (F \to F))$. A Modus Ponens következtetési szabályt alkalmaza az F_1 és F_2 formulákra legyen
$F_3 = (F \to (F \to F)) \to (F \to F)$. Az 1. logikai axiómába $\alpha = \beta = \gamma = F$-et írva
$F_4 = F \to (F \to F)$, majd F_3 és F_4-re Modus Ponens-t alkalmazva
$F_5 = F \to F$.

13. Mutassuk meg, hogy
a) $\{A \to B, B \to C, A\} \vdash C$;
b) $\{\beta, (\neg\alpha) \to (\neg\beta)\} \vdash \alpha$ (azaz az indirekt következtetést le lehet vezetni);
c) $\{\alpha \to \beta\} \vdash (\neg\beta) \to (\neg\alpha)$ (azaz a kontrapozitív okoskodás is levezethető).
d) $\{\neg\neg F\} \vdash F$.