A matematika alapjai, 1. óra

1. Igaz vagy hamis?

a) $\emptyset \in \emptyset$	**b)** $\emptyset = \{\emptyset\}$	**c)** $\emptyset \in \{\emptyset\}$	**d)** $\{\emptyset\} \in \emptyset$	**e)** $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$	**f)** $\{\emptyset\} \subseteq \emptyset$
g) $\emptyset \subseteq \emptyset$	**h)** $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset\}$	**i)** $\{\emptyset\} = \{\{\emptyset\}\}$	**j)** $\emptyset \in \{\{\emptyset\}\}$	**k)** $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$	**l)** $\emptyset \subseteq \{\{\emptyset\}\}$
m) $\{\emptyset\} \subseteq \{\{\emptyset\}\}$	**n)** $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq \{\{\emptyset\}\}$	**o)** $\emptyset \subseteq \mathbb{N}$	**p)** $0 \in \mathbb{N}$	**q)** $\{0\} \in \mathbb{N}$	**r)** $\{0\} \subseteq \mathbb{N}$

Megoldás: A részletes megoldás helyett az átgondolandó és alkalmazandó fogalmakat, definíciókat nézzük át. A és B mindig halmazok. A logikai jelekkel felírt formulákban azért használtam bőven zárójeleket, hogy pontosan követhető legyen, mi az implikáció feltétele és mi a következménye (azaz hogy mi a „nyilacska” bal és jobb oldalán szereplő formula).

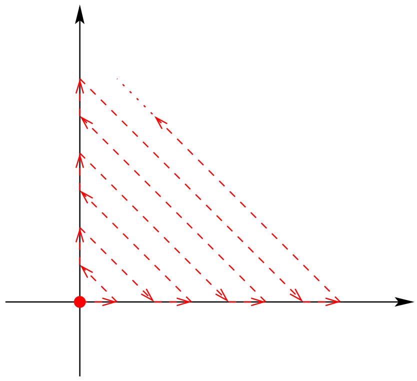
- Két halmaz definíció szerint akkor egyenlő, ha ugyanazok az elemeik. Azaz $(A = B) \iff ((x \in A) \iff (x \in B))$.
- Az üres halmaz egy *halmaz* (tehát nem „maga a semmi”), aminek nincsen eleme (azaz benne nincs semmi).
- $(A \subseteq B) \iff ((x \in A) \Rightarrow (x \in B))$; azaz A akkor részhalmaza B-nek, ha A minden eleme B-ben is benne van.

És a végére még egy kis vicc, én Korándi tanár úrtól kaptam:

2. a) A Végtelen Szállodában végtelen sok szoba van, minden természetes szám pontosan egy szoba száma. Egy új vendég szobát szeretne foglalni, azonban a szálloda tele van. Mit tehet a tulajdonos, ha szeretne a szállodájában szobát adni az új vendégnek, de persze a régieket sem akarja elküldeni?
b) Egy végtelen busz érkezik, tele új vendéggel (sorszámozottak). Tud-e mindegyiknek szobát adni a tulaj?
c) Újabb végtelen busz érkezett, de ezúttal nem is egy, hanem végtelen sok darab, melyek a természetes számokkal vannak sorszámozva, és mind tele van szobára áhítozó vendéggel...

Megoldás: **a)** Megkér minden bentlakót, hogy pontban reggel 8:00-kor költözzön át az eggyel nagyobb számú szobába. Így minden régi vendégnek lesz szobája, és az első fölszabadul az új vendég számára. **b)** Megkér minden bentlakót, hogy pontban reggel 8:00-kor költözzön át a kétszeres számú szobába, a busz k-adik ülésén utazó utas pedig költözzön a $2k+1$-es számú szobába. **c)** A precízség kedvéért tisztázzuk, hogy van-e nullás sorszámú szoba; mondjuk legyen. A szálloda i. szobájának lakója költözzön a 2^i. szobába. Jelölje p_i az i-edik prímszámot ($p_1 = 2$, $p_2 = 3$ stb). Az i. busz j. utasa költözzön a p_{i+2}^{j+1}-es sorszámú szobába (a buszokat és azok üléseit is 0-tól kezdve számozzuk). A számelmélet alaptétele szerint minden vendég (régi vagy új) privát szobát kap. Sőt, egy csomó szoba üresen marad!

Más megoldás:
d) Visszavezetjük a problémát az előző esetre annak belátásával, hogy az összes utas befér egyetlen végtelen buszba. Vegyük a nemnegatív síknegyed egy olyan bejárását, melynél minden pont véges sok lépés után sorra kerül (pl. az ábrán látható módon). Az x. busz y. számú ülésén utazó utas sorszáma legyen annak a lépésnek a száma, amelynél a bejárás éppen rálép az (x, y) pontra. Az így kiosztott sorszámok alapján mindenkinek lesz egy jóldefiniált sorszáma, arra az ülésre ülve az összes utas befér egy végtelen buszba.



3. Uhanga törzsfőnök az esti szavazás eredményét összegzi. Aki a szomszéd törzs megtámadását szorgalmazta, piros bogyót dobott az edénybe, aki nem, az zöldet. Uhanga ugyan nem tud számolni, mégis meg tudta állapítani, melyik tábor nyert. Hogyan?

Megoldás: Párba állítja a bogyókat. Amelyik tábor bogyói hamarabb elfogynak, az vesztett.

4. Hogyan definiálhatnánk, hogy két halmaz ugyanakkora (feltéve, hogy ilyen-olyan okból nem tudjuk meghatározni az elemszámukat)?

Megoldás: Ha párba lehet állítani az elemeiket (azaz van köztük bijektív leképezés), akkor joggal mondhatjuk, hogy ugyanannyian vannak. Ld a definíciót a feladatsoron.

5. Miből van több: **a)** páros vagy páratlan számból? **b)** természetes számból vagy négyzetszámból?

Megoldás: **a)** $k \to k+1$ bijekció a páros és páratlan számok közt, míg **b)** $k \to k^2$ szintén bijekció a természetes számok és a négyzetszámok között, tehát a kérdéses számhalmazokban „ugyanannyi” elem van.

Definíció: Legyen A és B két halmaz, f pedig egy $A \to B$ függvény (azaz A minden eleméhez hozzárendeli B-nek pontosan egy elemét). Azt mondjuk, hogy f *injektív*, ha $\forall x, y \in A, x \neq y$ esetén $f(x) \neq f(y)$; *szürjektív*, ha $\forall b \in B \exists a \in A \colon f(a) = b$; és *bijektív*, ha szürjektív és injektív egyszerre.

6. Mutass...
a) $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ injekciót. **b)** $\mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ injekciót. **c)** $\mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ szürjekciót. **d)** $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ szürjekciót.
e) $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ bijekciót.
f) Intuitíve melyik mit mond $\mathbb{N}$ és $\mathbb{Q}$ „méretének” viszonyáról?

Megoldás: **a)** $x \mapsto x \colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ injekció. **b)** Minden racionális számot reprezentáljunk p/q alakban, ahol $\text{lnko}(p,q) = 1$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$. A p/q számhoz rendeljük hozzá a $2^p 3^q$ számot, ha p nemnegatív, és a $5^{|p|} 7^q$ számot, ha p negatív. Ez nyilván injekció. **c)** $f(x) := x$, ha $x \in \mathbb{N}$, $f(x) = 0$ egyébként. **d)** Vegyük most az $\{(x,y) \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : y > 0\}$ rácsrész egy tetszőleges bejárását. Ha a bejárás n-edik lépésénél az (x,y) rácspontban járunk, akkor az $n \in \mathbb{N}$ számhoz rendeljük hozzá az $x/y \in \mathbb{Q}$ számot. Ez nyilván szürjekció. (Vajon egy adott racionális számnak hány ősképe van ennél a megfeleltetésnél?) **e)** Vegyük ugyanazt a bejárást, mint az előző részfeladatban, csak ugorjuk át azokat az (x,y) rácspontokat, ahol $\text{lnko}(x,y) > 1$. A bejárás szerinti sorszámozás (amit az előbb is csináltunk) ekkor bijekció lesz. *Megjegyzés:* persze ez a bijekció (vagy az inverze) jó leképezés minden részfeladatra; a korábbi megoldások egyszerűbb voltuk miatt lettek bemutatva.

f) Általában, ha van $A \to B$ injekció, az azt jelenti, hogy B legalább akkora, mint A (hiszen A minden eleméhez tartozik egy-egy különböző elem B-ből); ha pedig van $A \to B$ szürjekció, akkor A legalább akkora, mint B (hiszen az A-beliek képei lefedik egész B-t). Ha mindkettő fennáll, akkor azt sejtenénk, hogy a két halmaz „ugyanakkora”, azaz kéne legyen köztük bijekció. De vajon tényleg van-e? (Spoiler: igen.)