A matematika alapjai, 3. óra

1. a) Mutassuk meg, hogy nincs bijekció $\mathbb{N}$ és $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ között (utóbbi az $\mathbb{N}$ halmaz összes részhalmazából álló halmaz).
b) Létezik vajon $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bijekció?

Definíció: A és B halmazok *ekvivalensek* (jelölésben $A \sim B$), ha létezik $f\colon A \to B$ bijekció (jelölésben $A \sim_f B$).

2. Mutassuk meg, hogy a $\sim$ ekvivalenciareláció[1] (azaz $A \sim A$ (reflexív); ha $A \sim B$, akkor $B \sim A$ (szimmetrikus); ha $A \sim B$ és $B \sim C$, akkor $A \sim C$ (tranzitív)).

„Definíció”[1] (számosságok és összehasonlításuk):

- Az előző feladat alapján a halmazok összessége egymással ekvivalens halmazok osztályaira bomlik. Az egy osztályban levő halmazok közös tulajdonságát *számosságnak* hívjuk; egy A halmaz számosságát $|A|$-val jelöljük. Ha tehát $A \sim B$, akkor azt mondhatjuk, hogy A és B számossága ugyanaz, írásban $|A| = |B|$.

- Két számosság, a és b egyenlő, ha valamely $|A| = a$ és $|B| = b$ halmazokra $A \sim B$. (Láttuk, hogy ez jóldefiniált: nem függ a mintahalmazok választásától.)

- Ha a és b számosságok, akkor $a \le b$ definíció szerint akkor, ha valamely $|A| = a$ és $|B| = b$ halmazok esetén van $A \to B$ injekció;

- Ha a és b számosságok, akkor $a < b$ definíció szerint akkor, ha $a \le b$, de $a \ne b$.

A következőkben megmutatjuk, hogy a számosságokon definiált $\le$ jóldefiniált részbenrendezés, azaz: kompatibilis az $=$-gel (nem függ a mintahalmazok választásától); reflexív ($a \le a$); tranzitív ($a \le b \le c \Rightarrow a \le c$); és antiszimmetrikus ($a \le b$ és $b \le a$ esetén $a = b$).

3. Mutassuk meg, hogy
a) ha A, A', B, B' halmazok, $|A| \le |B|$, $|A| = |A'|$ és $|B| = |B'|$, akkor $|A'| \le |B'|$;
b) tetszőleges két a, b számosságra $a \le b$ jóldefiniált, azaz teljesülése vagy nem teljesülése nem függ a mintahalmazok választásától;
c) ha a és b számosságokra $a \le b$ és $b \le a$, akkor $a = b$.
d) ha a számosság, akkor $a \le a$;
e) ha a, b és c számosságokra $a \le b$ és $b \le c$, akkor $a \le c$.

4. Következik vajon az eddigiekből, hogy…
a) ha az a, b, c számosságokra $a \le b < c$, akkor $a < c$?
b) $|A| < |B|$ és $|B| < |A|$ nem teljesülhet egyszerre?
c) tetszőleges A, B halmazokra $|A| < |B|$, $|A| = |B|$, $|A| > |B|$ közül pontosan az egyik teljesül (azaz a „kiterjesztett $<$” is trichotóm?)

Definíció: Az $\mathbb{R}$ számosságát *kontinuumnak* nevezzük, amit $\mathfrak{c}$-vel jelölünk. Az $\mathbb{N}$ számosságát *megszámlálható végtelennek* nevezzük és $\aleph_0$-lal jelöljük (ejtsd: alef null).

5. Mit mondhatunk $\aleph_0$ és $\mathfrak{c}$ viszonyáról?

6. Mutassuk meg közvetlenül, hogy nincs bijekció $\mathbb{N}$ és a valós számok közt, másképp szólva, hogy tetszőleges valós $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ számsorozathoz található olyan valós x valós szám, melyre $\forall i \in \mathbb{N}\colon x \ne a_i$. (Apropó: miért ugyanaz a kétféle megfogalmazás?)

7. Mutassunk bijekciót…
a) $(a_1;a_2) \times (b_1;b_2)$ és $(c_1;c_2) \times (d_1;d_2)$ között[2], ahol $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$, $c_1 < c_2$ és $d_1 < d_2$;
b) $(-\pi/2;\pi/2) \times (-\pi/2;\pi/2)$ és $\mathbb{R}^2$ között;
c) $(0,1)$ és $(0,1) \times (0,1)$ között.
d) Mit jelent ez $\mathbb{R}$ és $\mathbb{R}^2$ számosságára nézve?

---

[1] Ez így nem teljesen korrekt, ld. pl. Komjáth Péter ‘Halmazelmélet’ jegyzetét.
[2] Ez két nyílt téglalap.