

## A matematika alapjai, 4. óra

1. Igaz vagy hamis?

- a)  $x \in y \in z \Rightarrow x \in z$ ;    b)  $x \in y \subseteq z \Rightarrow x \in z$ ;    c)  $x \subseteq y \in z \Rightarrow x \in z$ ;    d)  $x \subseteq y \subseteq z \Rightarrow x \in z$ ;  
e)  $x \in y \in z \Rightarrow x \subseteq z$ ;    f)  $x \in y \subseteq z \Rightarrow x \subseteq z$ ;    g)  $x \subseteq y \in z \Rightarrow x \subseteq z$ ;    h)  $x \subseteq y \subseteq z \Rightarrow x \subseteq z$ .

**Definíció:** Ha  $A$  halmaz,  $\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}$  az  $A$  *hatványhalmaza* (azaz  $\mathcal{P}(A)$  az  $A$  részhalmazainak a halmaza).

2. Legyen  $A$  egy véges,  $n$  elemű halmaz. Hány eleme van  $\mathcal{P}(A)$ -nak?

3. Egy  $H$  halmazra legyen  $\mathcal{P}^1(H) = \mathcal{P}(H)$ , és legyen  $\mathcal{P}^k(H) = \mathcal{P}(\mathcal{P}^{k-1}(H))$ .

a) Micsoda  $\mathcal{P}(\emptyset)$ ? És  $\mathcal{P}(\{\emptyset\})$ ? És  $\mathcal{P}^3(\emptyset)$ ?

b) Hány eleme van  $\mathcal{P}^n(\emptyset)$ -nek?

4\*. **Cantor-tétel.** Mutassuk meg, hogy tetszőleges (esetleg végtelen)  $X$  halmazra  $|X| < |\mathcal{P}(X)|$ .

5. Hányféleképpen tudod bizonyítani eddig, hogy a valós számok halmaza nem megszámlálható (avagy  $c > \aleph_0$ )?

6. Van-e a  $c$ -nél nagyobb számosság? Tudsz konkrétan olyan halmazt mutatni, aminek nagyobb a számossága, mint  $\mathbb{R}$ -nek? És annál is nagyobbbat? Vajon van olyan, hogy legnagyobb számosság?

„**Definíció:**” Az  $\aleph_0$ -nál nagyobb számosságok közül a legkisebbet  $\aleph_1$ -nek nevezzük. Hasonlóan, az  $\aleph_n$  számosság az a legkisebb számosság, ami nagyobb  $\aleph_{n-1}$ -nél<sup>1</sup>.

7. Mit tudunk  $\aleph_1$  és  $c$  viszonyáról ( $=, \leq, \geq, <, >, \dots$ )?

8. Mutasd meg, hogy csak megszámlálható sok diszjunkt körlapot lehet elhelyezni a síkon.

9. Mutassuk meg, hogy nem lehet lefedni a síkot  $c$ -nél kevesebb egyenessel.

10. Hány véges részhalmaza van  $\mathbb{N}$ -nek?

### Kiegészítő feladatok.

11. a) Hány diszjunkt  $O$  betűt lehet leírni a síkra, ha ugyanakkorák? És ha különböző méretűek is lehetnek?

b\*) És  $T$  betűt?

12. Mutasd meg, hogy a síkon több mint kontinuum sok konvex részhalmaz van.

---

<sup>1</sup>Egyáltalán nem nyilvánvaló, hogy ez a definíció értelmes. Például annak sincs értelme, hogy „a 2-nél nagyobb valós számok közül a legkisebb”. Belátható azonban, hogy a végtelen számosságokra a fenti definíció értelmes (de ettől eltekintünk ebben a kurzusban).