A matematika alapjai, kiegészítés a feladatsorokhoz

Néhány vázlatos illusztráció a szokásos számfogalmak halmazok segítségével történő értelmezésére.

1. A természetes számok értelmezése halmazokkal. Legyen $0 = \emptyset$, és egy n szám rákövetkezője (amit jelölhetünk $n+1$-gyel) legyen $n \cup \{n\}$. Így például $1 = 0 \cup \{0\} = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\} = \{0\}$; $2 = 1 \cup \{1\} = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\}$. Általában $n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$; és valóban, ekkor $n+1 = n \cup \{n\} = \{0, 1, 2, \ldots, n-1, n\}$ mindig fennáll. Ezek a fogalmak (0, rákövetkező) teljesítik Peano-axiómarendszer követelményeit (ami a természetes számok bevett axiómarendszere), tehát a szokásos műveletek és a rendezés is megvalósítható ezen számfogalommal, de ezzel most nem foglalkozunk.

2. Az egész számok értelmezése halmazokkal. Negatív számaink eddig nincsenek. Nemnegatív számok különbségeként elő tudjuk állítani a negatív számokat is, de kivonni sem tudunk. Az ötlet az, hogy egy kivonás eredményét nem, csak a kivonásban szereplő tagokat használjuk: egy $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ párt magunkban az $a - b$ kivonás eredményének gondolhatunk. Persze így pl $(6, 4)$ és $(4, 2)$ ugyanazt „jelenti”. Vezessük be a $\sim$ relációt $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$-en: $(a, b) \sim (c, d) \iff a + d = b + c$ (ami persze azzal ekvivalens, hogy $a - b = c - d$, de úgy fogalmaztuk meg, hogy nem kell hozzá a kivonást értelmezni). Ez a $\sim$ reláció ekvivalenciareláció, ennek ekvivalenciaosztályai az egész számok.

3. A racionális számok értelmezése halmazokkal. Ez talán a legismertebb: törteket akarunk képezni az egész számokból, de valahogy úgy értelmezve, hogy ne kelljen osztani (hiszen azt még nem tudunk). Az ötlet az, hogy az osztás eredményét magát nem, csak az osztásban szereplő tagokat használjuk, tehát egy $\frac{a}{b}$ törtet az (a, b) pár jelent (az osztás elvégzése nélkül). Persze ugyanazt a számot több tört is előállít, tehát itt is szükségünk lesz egy $\sim$ ekvivalenciarelációra: $(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc$ (ez azzal ekvivalens, hogy $a/b = c/d$, de nem kell elvégezni hozzá az osztást). A $\sim$ reláció ekvivalenciaosztályai legyenek a racionális számok.

4. A valós számok értelmezése halmazokkal. Ha már vannak racionális számaink, könnyen adódik az ötlet, hogy konvergens racionális sorozatok határértékeként előáll az összes valós szám. Egy racionális sorozat ($a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}$) ugyanaz, mint egy $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ függvény (az $a_n = f(n)$ azonosítással), tehát tudjuk őket halmazokként értelmezni (a függvényeket már értelmeztük halmazokként). A konvergencia eldöntésére viszont nem használhatjuk azt a definíciót, hogy „az a_n sorozat konvergens, ha $\exists A$, melyre $\forall \varepsilon > 0$-ra $\exists N$, hogy minden $n \geqslant N$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$”, hiszen így egy irracionális számhoz tartó sorozatot nem mondanánk konvergensnek (az $A = \sqrt{2}$ szereposztás nem működik, mert még csak racionális számaink vannak). Ehelyett a Cauchy-konvergencia fogalmát fogjuk használni: egy a_n racionális sorozat konverges, ha minden $\varepsilon > 0$ (racionális) számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbérték, hogy tetszőleges $m, n \geqslant N$ esetén $|a_n - a_m| < 0$. Analízisből tanultuk, hogy a kétféle definíció ugyanazt a konvergenciafogalmat adja a valós számok körében. Legyen tehát S a Cauchy-konvergens racionális sorozatok halmaza. Persze itt is szükségünk van egy $\sim$ ekvivalenciarelációra, ami azt dönti el, hogy két sorozat ugyanoda tart-e; legyen $a_n \sim b_n$, ha $\forall \varepsilon > 0$ (racionális) számra $\exists N$, hogy minden $n \geqslant N$ esetén $|a_n - b_n| < \varepsilon$. Ez ekvivalenciareláció lesz, az ekvivalenciaosztályai legyenek a valós számok. Itt is igaz, hogy a szokásos műveletek, rendezés értelmezhető úgy, hogy a valós számok axiómarendszerét kielégítő rendszert kapjunk, tehát a valós számok fogalmát is lehetséges halmazok segítségével értelmezni.