A matematika alapjai, 8. feladatsor

Zermelo–Fraenkel axiómák:
0. Az egyenlőség axiómája. Ha két halmaznak ugyanazok az elemei, akkor egyenlők.
1. A létezés axiómája. Létezik halmaz. (Erősebb formája: létezik az üres halmaz.)
2. Részhalmaz-axióma. Ha A halmaz, T pedig egy szabatosan megfogalmazott tulajdonság, akkor $\{x \in A\colon T(x)\}$ halmaz.
3. Páraxióma Ha x és y halmaz, akkor létezik olyan halmaz, mely pontosan x-et és y-t tartalmazza.
4. Az unió axiómája. Ha A halmaz, akkor $\cup A := \{x\colon \exists y \in A\colon x \in y\}$ is halmaz. (Azaz $\cup A = \cup_{B\in A} B$.)
5. A hatványhalmaz axiómája. Ha A halmaz, akkor $\mathscr{P}(A) = \{x\colon x \subset A\}$ is halmaz.
6. A végtelen halmaz axiómája. Van végtelen halmaz.
7. A pótlás axiómája. Ha A halmaz, f operáció[1], akkor $\{f(x)\colon x \in A\}$ halmaz.
8. A jólfundáltság axiómája. Ha A halmaz, akkor van olyan $B \in A$, melyre $A \cap B = \emptyset$.

Az alábbi feladatok állításait a fenti axiómákból vezessük le (azaz semmi másra nem hivatkozhatunk, mint a fenti axiómákra, és a szokásos levezetése szabályokra). Ha ez megtehető, az azt jelenti, hogy az adott állítás minden ZF-univerzumban igaz. (**Megjegyzés:** a „szokásos” matematika nagy része levezethető a ZFC axiómákból (a C később lesz), azaz mindig működik, függetlenül attól, hogy konkrétan melyik ZFC-univerzumra (halmazokra) építjük föl a matematikát.)

1. Vajon $\{\emptyset\} = \{\emptyset, \emptyset\}$ vagy sem?

2. Mutasd meg, hogy a jólfundáltság miatt nem lehet olyan X halmaz, melyre $X \in X$.

3. Az 1. és a 2. axiómából vezesd le a létezés axiómájának erős változatát.

4. Mutasd meg, hogy ha A és B halmazok, akkor $A \cap B$ és $A \backslash B$ is azok.

5. Legyenek A, B és C halmazok. Igazoljuk, hogy $A \cup B$ és $A \cup B \cup C$ is halmazok.

6. Mi a különbség $\cup\emptyset$, $\cup\{\emptyset\}$ és $\cup\{\{\emptyset\}\}$ között?

7. Hány halmazt tudunk készíteni az üres halmazból kiindulva az első három axióma segítségével? És milyen elemszámúakat? És ha az unió axiómáját is használhatjuk?

8. (Rendezett pár.) Adott x és y esetén legyen $\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Mutassuk meg, hogy **a)** $\langle x, y\rangle$ halmaz, és **b)** $\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle \iff x = u$ és $y = v$.

9. Legyen $A \times B = \{\langle x, y\rangle\colon x \in A, y \in B\}$. Lássuk be, hogy ha A és B halmazok, akkor $A \times B$ is az.

10. Mutassuk meg, hogy egy függvény értelmezési tartománya (D_f) és értékkészlete (R_f) is halmazok. (Emlékeztető: Egy f halmaz *függvény*, ha f elemei rendezett párok, és $\langle x, y\rangle \in f$ és $\langle x, y'\rangle \in f$ esetén mindenképpen teljesül $y = y'$.)

11. Mutasd meg, hogy tetszőleges A halmazra az A-n értelmezett identitás leképezés egy függvény (azaz ha A benne van egy ZFC-univerzumban, akkor az A-n értelmezett identitás is).

12. Legyen f injektív függvény. Vezesd le a ZFC axiómákból, hogy f^{-1} is függvény! (Speciel bijektív függvénynek is mindig van inverze.)

13. Lássuk be, hogy ha f és g függvények és $R_f \subset D_g$, akkor kompozíciójuk is az.

14. Legyen A egy nemüres halmaz. Vezesd le a ZFC axiómákból, hogy az $f\colon A \to \mathscr{P}(A)$ hozzárendelés, melyre $f(a) = \{a\}$ minden $a \in A$-ra, egy függvény!

15. Hol használtuk az előző négy állítást (függvényt) korábbi tanulmányainkban? (Lépten-nyomon!)

[1] Olyan hozzárendelés, ami nem feltétlenül függvény, azaz az értelmezési tartománya nem feltétlenül halmaz.