# A matematika alapjai, 8. feladatsor

**Motiváció:** amit eddig csináltunk, az az ún. **naív halmazelméleten** alapult: ott objektumok tetszőleges (értelmes) gyűjteménye halmazt alkot, azaz mondhattunk olyanokat, hogy „vegyük az egész számok halmazát”, „vegyük a páros természetes számok halmazát”, „vegyük a teáskanalak halmazát”, „vegyük az összes számosság halmazát”, „vegyük az összes halmazok halmazát”, „vegyük az önmagukat nem tartalmazó halmazok halmazát” stb. Viszont láttuk, hogy ez ellentmondásokhoz vezet. **Konklúzió:** nem mondhatjuk objektumok bármilyen gyűjteményére azt, hogy az egy halmaz. (A halmaz a „kicsi”, „jól kezelhető” gyűjtemények, melyekkel sok megszokott dolgot lehet csinálni, például képezni a hatványhalmazát stb.) **Megoldás:** bizonyos összességeket, gyűjteményeket fogunk halmazoknak nevezni; a halmaznak nevezett gyűjtemények összességét halmazuniverzumnak fogjuk nevezni és ezt az összességet $\mathscr{U}$-val jelölhetjük. Akkor lesz alapunk az $\mathscr{U}$ gyűjteményt halmazuniverzumnak nevezni, ha teljesíti az alábbi axiómarendszerben megfogalmazott elvárásainkat; ezeket fogjuk $ZF$-univerzumoknak hívni.
**Figyelem!** Innentől a halmaz szó azt jelenti, hogy olyan gyűjtemény, ami benne van $\mathscr{U}$-ban rögzített $\mathscr{U}$-ra nézve. (Vigyázat! $\mathscr{U}$ nem egyértelmű, többféle halmazuniverzum is létezik! Ahogy a csoportelmélet axiómáit sokféle struktúra teljesíti, melyek mindegyikét joggal nevezzük csoportnak, ugyanúgy az alábbi axiómákat is sokféle halmazuniverzum teljesíti, és mindegyiket joggal nevezzük halmazuniverzumnak. De ezek között lehetnek eltérések: ugyanaz a gyűjtemény az egyik halmazuniverzumban benne lehet, azaz halmaznak számít, egy másik halmazuniverzumban meg nincs benne, azaz ott nem számít halmaznak.)

**Zermelo–Fraenkel axiómák:**
**0. Az egyenlőség axiómája.** Ha két halmaznak ugyanazok az elemei, akkor egyenlők.
**1. A létezés axiómája.** Létezik halmaz. (Erősebb formája: létezik az üres halmaz.)
**2. Részhalmaz-axióma.** Ha $A$ halmaz, $T$ pedig egy szabatosan megfogalmazott tulajdonság, akkor $\{x \in A\colon T(x)\}$ halmaz.
**3. Páraxióma** Ha $x$ és $y$ halmaz, akkor létezik olyan halmaz, mely pontosan $x$-et és $y$-t tartalmazza.
**4. Az unió axiómája.** Ha $A$ halmaz, akkor $\cup A := \{x\colon \exists y \in A\colon x \in y\}$ is halmaz. (Azaz $\cup A = \cup_{B \in A} B$.)
**5. A hatványhalmaz axiómája.** Ha $A$ halmaz, akkor $\mathscr{P}(A) = \{x\colon x \subset A\}$ is halmaz.
**6. A végtelen halmaz axiómája.** Van végtelen halmaz.
**7. A pótlás axiómája.** Ha $A$ halmaz, $f$ operáció[1], akkor $\{f(x)\colon x \in A\}$ halmaz.
**8. A jólfundáltság axiómája.** Ha $A$ halmaz, akkor van olyan $B \in A$, melyre $A \cap B = \emptyset$.

**Néhány megjegyzés:**

1. A részhalmaz-axióma nagyon hasonlít a naív halmazelméletre: megfogalmazunk egy tulajdonságot, az annak eleget tevő elemeket összegyűjtjük, és a kapott gyűjtemény egy halmaz. A nagyon fontos különbség ott van, hogy a naív halmazelméletben a világ összes létezője közül válogattuk ki a megfelelő elemeket, a részhalmaz-axiómában pedig egy halmaz elemei közül. Tehát a tulajdonság szerinti vizsgálatnak és összegyűjtésnek alávetett elemek összessége sokkal korlátozottabb a részhalmaz-axióma esetében.

2. Amikor néhány halmaz unióját vesszük, ugye meg kell mondanunk, hogy melyik halmazokat uniózzuk („öntjük össze az elemeiket egy zsákba”). A naív megközelítésben bármit mondhatnánk; itt viszont fontos, hogy az összeuniózásra kerülő halmazok gyűjteménye is halmazt kell alkosson. Tehát csak „halmaznyi” halmazt tudunk összeuniózni, nem akármennyit; ezt a halmazt kell megadnunk, az elé írjuk az unió jelet. Ha például az $X$ és $Y$ halmazok unióját akarjuk venni, azt akkor tehetjük meg az unió axiómája szerint, ha $\{X, Y\}$ egy halmaz; és ekkor $\cup\{X, Y\}$ éppen $X \cup Y$. Ugyanígy megy nem kettő, hanem akármilyen sok halmazra is: ha az összeuniózandó halmazok összessége halmaz, akkor az unió axiómája garantálja, hogy az uniójuk is halmaz (ha pedig az összeuniózandó halmazok összessége nem halmaz (azaz nincs az $\mathscr{U}$ halmazuniverzumban), akkor az „összeöntésükkel” kapott gyűjtemény (az uniójuk) vagy halmaz, vagy nem; ekkor az unió axiómája nem mond semmit.)

3. A hatványhalmaz axiómájánál értsük jól: egy $A$ halmaznak néhány eleméből álló $B$ gyűjtemény nem biztos, hogy részhalmaza $A$-nak; csak akkor rész*halmaz*, ha $B$ halmaz is, azaz $B$ benne van az $\mathscr{U}$ halmazuniverzumban. A $\mathscr{P}(A)$ hatványhalmazban tehát azok a $B$ halmazok vannak benne, melyeknek minden eleme $A$-ban van; de ez nem feltétlenül jelenti az $A$ elemeiből képezhető „összes lehetséges” gyűjteményt. **Megjegyzés:** azért az összes emberi ésszel elképzelhető gyűjteményt jelenti: a részhalmaz-axióma alapján, ha meg tudunk fogalmazni egy $T$ tulajdonságot, ami alapján kiválogatunk néhány elemet $A$-ból, akkor ez a $B$ gyűjtemény halmaz lesz, tehát $A$

[1] Olyan hozzárendelés, ami nem feltétlenül függvény, azaz az értelmezési tartománya nem feltétlenül halmaz.

részhalmazát kapjuk. De elképzelhető, hogy $A$-nak néhány eleméből álló gyűjteményt nem tudunk tulajdonság alapján kiválogatni, mert „nincsenek rá szavaink”. Itt érdemes megjegyezni, hogy egy $T$ tulajdonság megfogalmazása véges hosszúságú mondattal (formulával) történik, és véges mondatból csak megszámlálhatóan sok van; tehát a részhalmaz-axióma egy végtelen halmaz esetén messze nem képes megfogni az „összes lehetséges” válogatást.

4. Ha $\mathscr{U}$ nem teljesítené a végtelen halmaz axiómáját, akkor például nem lehetne $\mathscr{U}$-ban értelmezni a természetes számok halmazát (hiszen az egy végtelen halmaz). Ez olyan veszteség lenne, amit nem szeretnénk elszenvedni.

5. A pótlás axiómájánál példa operátorra a számosság: minden halmazhoz hozzá tudjuk rendelni (meg tudjuk határozni) a számosságát, de az $A \mapsto |A|$ leképzés nem függvény, mert az értelmezési tartománya az összes halmaz, és láttuk, hogy az összes halmaz gyűjteménye nem alkothat halmazt (abból ellentmondást kapunk). Ennek az operátornak az értékkészlete az összes számosság gyűjteménye, ami szintén nem halmaz. Az axióma azt mondja, hogy ha a bemenetet megszorítjuk halmaznyi méretre, és csak az azon előálló értékeket gyújtjük össze, akkor az eredmény egy halmaz kell legyen.

Az alábbi feladatok állításait a fenti axiómákból vezessük le (azaz semmi másra nem hivatkozhatunk, mint a fenti axiómákra, és a szokásos levezetése szabályokra). Ha ez megtehető, az azt jelenti, hogy az adott állítás minden $ZF$-univerzumban igaz. (**Megjegyzés:** a „szokásos” matematika nagy része levezethető a ZFC axiómákból (a C később lesz), azaz mindig működik, függetlenül attól, hogy konkrétan melyik ZFC-univerzumra (halmazokra) építjük föl a matematikát.)

**1.** Vajon $\{\varnothing\} = \{\varnothing, \varnothing\}$ vagy sem?

*Megoldás:* Ugyanazok az elemeik (mindkét halmaznak csak az üres halmaz az eleme), így az egyenlőség axiómája szerint a két halmaz ugyanaz (egyenlők).

**2.** Mutasd meg, hogy a jólfundáltság miatt nem lehet olyan $X$ halmaz, melyre $X \in X$.

*Megoldás:* Ha lenne, akkor a páraxióma miatt szintén halmaz $A = \{X\}$ megsértené a jólfundáltságot: $A$ egyetlen eleme $X$, és $X \cap A \neq \varnothing$, hiszen $X \in X$ és $X \in A$. Tehát nem létezne $A$-nak olyan eleme, amit megkövetel az axióma.

**3.** Az 1. és a 2. axiómából vezesd le a létezés axiómájának erős változatát.

*Megoldás:* Ha $A$ akármilyen halmaz (ilyen van: 1. ax.), akkor $\{a \in A\colon a \neq a\} = \varnothing$ is halmaz a részhalmaz-axióma miatt (de az $\{a \in A\colon a \notin A\}$ is tökéletes).

**4.** Mutasd meg, hogy ha $A$ és $B$ halmazok, akkor $A \cap B$ és $A \setminus B$ is azok.

*Megoldás:* $A \cap B = \{a \in A\colon a \in B\}$, $A \setminus B = \{a \in A\colon a \notin B\}$ halmazok a részhalmaz-axióma miatt.

**5.** Legyenek $A$, $B$ és $C$ halmazok. Igazoljuk, hogy $A \cup B$ és $A \cup B \cup C$ is halmazok.

*Megoldás:* A páraxióma miatt $\{A, B\}$ halmaz, és $\cup\{A, B\} = A \cup B$ az unió axiómája szerint halmaz. Szintén a páraxióma szerint $\{C\}$ halmaz, és a páraxiómát alkalmazva a $\{A, B\}$, $\{C\}$ halmazokra kapjuk, hogy $D = \{\{A, B\}, \{C\}\}$ is halmaz. Ekkor $E = \cup D = \{A, B, C\}$, így $\cup E = A \cup B \cup C$ az unió axiómja alapján halmaz. (Avagy: a páraxióma szerint $\{A \cup B, C\}$ halmaz, és ekkor az unió axiómája szerint $\cup\{A \cup B, C\} = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$ is halmaz.)

**6.** Mi a különbség $\cup\varnothing$, $\cup\{\varnothing\}$ és $\cup\{\{\varnothing\}\}$ között?

*Megoldás:* Az első az üres unió: az üres halmazban nincsenek halmazok, melyek unióját kellene venni, az eredmény így az üres halmaz. A második esetben az $\{\varnothing\}$ halmazban levő $\varnothing$ halmaz elemeit kell az unióba tenni, ami így nyilván szintén üres (de maga a művelet nem üres, el kell végezni). A harmadik esetben az eredmény $\{\varnothing\}$.

**7.** Hány halmazt tudunk készíteni az üres halmazból kiindulva az első három axióma segítségével? És milyen elemszámúakat? És ha az unió axiómáját is használhatjuk?

**8.** (Rendezett pár.) Adott $x$ és $y$ esetén legyen $\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Mutassuk meg, hogy **a)** $\langle x, y\rangle$ halmaz, és **b)** $\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle \iff x = u$ és $y = v$.

*Megoldás:* **a)** A páraxióma szerint $\{x\}$ és $\{x, y\}$ halmazok, és újfent a páraxióma szerint $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ is halmaz. **b)** Ha $x = u$ és $y = v$, akkor nyilván $\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle$. A megfordításhoz tegyük föl, hogy $\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle$. Esetszétválasztással folytatjuk: ha $x = y$, akkor $\langle x, y\rangle = \{\{x\}\}$ egy egyelemű halmaz, így a jobb oldali halmaz is egyelemű, ami csak úgy lehet, ha $u = v$ és $\langle u, v\rangle = \{\{u\}\}$. Ekkor az $\{\{x\}\} = \{\{u\}\}$ egyenlőségből indulva, az egyenlőség axiómáját kétszer alkalmazva kapjuk, hogy $\{x\} = \{u\}$ és $x = u$, tehát valóban $x = u$ és $y = x = u = v$. Ha $x \neq y$, akkor $\langle x, y\rangle$ kételemű halmaz, és emiatt $\langle u,v\rangle$ is az, tehát $u \neq v$. Az egyenlőség axiómája szerint $\{x\} = \{u\}$ és $\{x,y\} = \{u,v\}$ vagy $\{x\} = \{u,v\}$ és $\{x,y\} = \{u\}$ következik, de az utóbbi nem állhat fent, mert nem egyeznek az elemszámok. Az előbbi esetben az egyenlőség axiómája szerint $x = u$ következik, amiből $\{x,y\} = \{u,v\} = \{x,v\}$, tehát szintén az egyenlőség axiómája szerint $y = v$ ($x = v$ nem lehet, mert $x = u$ és $u \neq v$).

**9.** Legyen $A \times B = \{\langle x,y\rangle : x \in A, y \in B\}$. Lássuk be, hogy ha $A$ és $B$ halmazok, akkor $A \times B$ is az.

**10.** Mutassuk meg, hogy egy függvény értelmezési tartománya ($D_f$) és értékkészlete ($R_f$) is halmazok. (Emlékeztető: Egy $f$ halmaz *függvény*, ha $f$ elemei rendezett párok, és $\langle x,y\rangle \in f$ és $\langle x,y'\rangle \in f$ esetén mindenképpen teljesül $y = y'$.)

*Megoldás:* Pl. $D_f$ halmaz voltát mutatjuk meg az $A \times B$-nél látottakhoz hasonlóan. Az unió axiómája szerint $\cup f$ halmaz; ebben azok a $\{x\}$ és $\{x,y\}$ alakú halmazok szerepelnek, melyek benne vannak valamely $f$-ben levő rendezett párban (v.ö. rendezett pár fentebbi definíciója). Ismét az unió axiómája szerint $\cup\cup f$ halmaz; ebben olyan $x$ és $y$ alakú elemek vannak, melyek szerepelnek $\cup f$ valamelyik elemében. Azaz $\cup\cup f = D_f \cup R_f$ (de azt még nem tudjuk, hogy $D_f$ és $R_f$ halmazok volnának). Ezután $D_f = \{x \in \cup\cup f : \exists y\{\{x\},\{x,y\}\} \in f\}$ a részhalmaz axiómája szerint halmaz.

*Megjegyzés:* Az a megoldás, hogy $D_f = \{x : \exists y : \{\{x\},\{x,y\}\} \in f\}$ nem jó. Azért, mert itt az univerzum összes $x$-e közül válogatjuk ki azokat, melyekhez létezik megfelelő $y$ elem; de erre a lépésre egyetlen axióma sem jogosít föl minket. Azért kellett a fenti meggondolás, hogy egy *halmazból* tudjunk alkalmas elemeket válogatni.

**11.** Mutasd meg, hogy tetszőleges $A$ halmazra az $A$-n értelmezett identitás leképezés egy függvény (azaz ha $A$ benne van egy ZFC-univerzumban, akkor az $A$-n értelmezett identitás is).

*Megoldás:* Ha $A$ halmaz, akkor az $A$-n értelmezett $f$ identitásfüggvény (persze halmazként értelmezve): $f = \{(a,a) : a \in A\}$ (hiszen $f$ elemei rendezett párok, és minden pár első eleméhez hozzárendeli a pár második elemét, tehát minden $a \in A$ elemhez éppen $a$-t rendeli). A rendezett pár definíciója szerint $(a,a) = \{\{a\},\{a,a\}\} = \{\{a\},\{a\}\} = \{\{a\}\}$ (az utolsó két lépésben az egyenlőség axiómáját alkalmazzuk). Ezek szerint $f = \big\{\{\{a\}\} : a \in A\big\}$; erről kéne bizonyítanunk, hogy halmaz (azaz az axiómák kikényszerítik, hogy $\mathscr{U}$-ban legyen).

Mivel $a$ halmaz minden $a \in A$-ra, a páraxióma szerint $\{a,a\} = \{a\}$ is halmaz (az egyenlőség axiómáját is használtuk). Hasonlóan, mivel $\{a\}$ halmaz, $\{\{a\}\}$ is halmaz minden $a \in A$ esetén. Tehát az $f$-ben összegyűjtendő elemek mindegyike szerepel $\mathscr{U}$-ban.

Már csak össze kéne gyűjteni őket egy halmazba; ehhez először egy nagyobb halmazt keresünk, ami tartalmazza mindet. Ha $a \in A$, azt úgy is mondhatjuk, hogy $\{a\} \subset A$, azaz $\{a\} \in \mathscr{P}(A)$. Tehát minden $a \in A$-ra $\{a\} \in \mathscr{P}(A)$ (és szerencsére $\{a\}$ halmaz, tehát jogosan írtuk az előbbit). Hasonlóan: $\{a\} \in \mathscr{P}(A)$ ugyanazt jelenti, mint $\{\{a\}\} \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(A))$, tehát minden $a \in A$-ra $\{\{a\}\} \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(A))$. Mivel $A$ halmaz, a hatványhalmaz-axióma szerint $\mathscr{P}(A)$ halmaz, és ugyanezen axióma szerint $\mathscr{P}(\mathscr{P}(A))$ is halmaz, ráadásul tartalmazza az összes $\{\{a\}\}$ halmazt ($a \in A$).

Ezek után hamar készen vagyunk: $f = \big\{y \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(A)) : \exists a \in A,\ \text{melyre } y = \{\{a\}\}\big\}$ halmaz a részhalmaz-axióma szerint, és ez a halmaz éppen az $A \to A$ identitásfüggvény.

**12.** Legyen $f$ injektív függvény. Vezesd le a ZFC axiómákból, hogy $f^{-1}$ is függvény! (Speciel bijektív függvénynek is mindig van inverze.)

**13.** Lássuk be, hogy ha $f$ és $g$ függvények és $R_f \subset D_g$, akkor kompozíciójuk is az.

**14.** Legyen $A$ egy nemüres halmaz. Vezesd le a ZFC axiómákból, hogy az az $f : A \to \mathscr{P}(A)$ hozzárendelés, melyre $f(a) = \{a\}$ minden $a \in A$-ra, egy függvény!

**15.** Hol használtuk az előző négy állítást (függvényt) korábbi tanulmányainkban? (Lépten-nyomon!)